TI83-werkblad

Vergelijkingen bij de normale verdeling

1. Inleiding

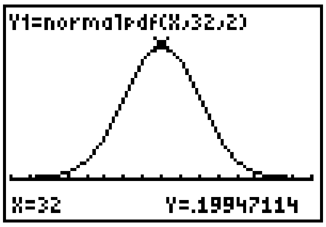
Een normale verdeling wordt bepaald door de constanten μ en σ.
Dit blijkt uit het voorschrift van de verdelingsfunctie van de normale verdeling:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

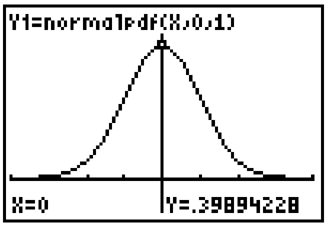
Voor μ = 0 en σ = 1 krijgen we:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

De grafiek van deze laatste functie is de *standaardnormale kromme*.
Hieronder zie je twee grafieken van normale verdelingen.



m = **32,** s = **2**



m = **0,** s = **1**

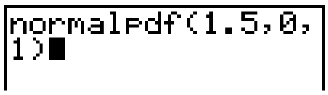
Indien we μ, σ en *x* kennen, kunnen we steeds de bijbehorende functiewaarde berekenen.
Die functiewaarde geven we in hetgeen volgt steeds aan met *y*.

Voorbeeld

Bereken *y* = Norm(0 ; 1)(1,5).
Hierin betekent "Norm(0 ; 1)(1,5)": μ = 0, σ = 1, x = 1,5.
We hebben hier dus van doen met de standaardnormale verdeling.

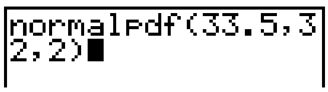
We kunnen *y* berekenen met de functie **normalpdf** in het [DISTR] menu.
Dus: *y* = 0,1295.

Ga na, dat hetzelfde antwoord verkregen wordt, als je na de waarde van *x* ook het gemiddelde (μ) en de standaarddeviatie (σ), *in deze volgorde*, gescheiden door komma's invoert.



We kunnen op deze manier ook bij andere normale verdelingen dan de standaardnormale verdeling, functiewaardes van de verdelingsfunctie berekenen.

Bereken *y* = Norm(32 ; 2)(33,5).
Antwoord: *y* = 0,1506.



♦ "Speel" alle bovenstaande voorbeelden na op je GR.

[einde Voorbeeld]

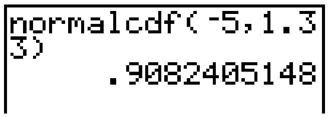
In de kansrekening spelen bovenstaande functies eigenlijk een ondergeschikte rol.
Veeleer gaat het om de **cumulatieve** verdelingsfuncties.
Dit zijn functies waarmee je de oppervlakte van vlakdelen onder de grafiek en boven de *x*-as berekent.
Op het werkblad "De standaardnormale verdeling" zijn deze functies ook al aan de orde gekomen.
De functiewaarden van deze cumulatieve functies worden meestal met **stochasten** aangegeven. Daarbij gebruiken we vaak Φ (en dan alleen in speciale gevallen) als het gaat over een normaalverdeelde stochast Z.

Voorbeelden

[1] Bereken Φ(1,33).
Dit betreft dus de standaardnormale verdeling.

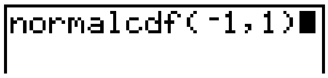
Hierbij geldt $\Phi(1{,}33) = P(Z \leq 1{,}33)$.

We gebruiken de functie **`normalcdf`** uit het [DISTR] menu.
Daarbij mogen we de ondergrens gelijk nemen aan –5.
De uitkomst is dus 0,9082.



[2] Bereken $P(-1 \leq Z \leq 1)$.
Ook hier hebben we de standaardnormale verdeling (dat is te zien aan het gebruik van Z als stochast).

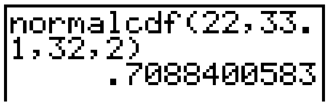
We kunnen nu direct de onder- en bovengrens gebruiken.

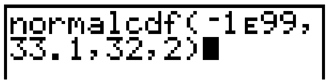


Ook hier mag het gemiddelde en de standaarddeviatie (in deze volgorde en gescheiden door komma’s) na de onder- en de bovengrens worden toegevoegd.
Ga dat in beide gevallen na.

[3] Bereken $P(X \leq 33{,}1 \mid X = \text{Norm}(32 ; 2))$.

We kunnen deze berekening uitvoeren door ook het gemiddelde en de standaarddeviatie in te voeren achter **`normalcdf`**.
Als vuistregel mag je in dit soort gevallen als ondergrens gebruiken:
$X_{onder} = \mu - 5\sigma = 32 - 10 = 22$.
Het antwoord is dus (op 4 decimalen afgerond): 0,7088.
Je kan echter in alle gevallen X_{onder} gelijk nemen aan -1×10^{99}.





[4] Bereken $P(110 \leq X \leq 112 \mid X = \text{Norm}(109{,}5 ; 2{,}1))$

Antwoord: 0,2890.

- “Speel” alle bovenstaande voorbeelden zelf nog eens na.

2. Vergelijkingen: m en s berekenen

We gebruiken in hetgeen volgt alleen de cumulatieve functies. De functiewaarden daarvan (de oppervlakte, de kans) geven we weer aan met *y*.

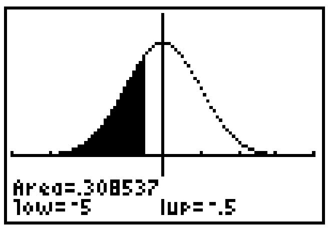
We gaan nu bekijken hoe we, als we *y* weten, telkens één van de andere grootheden kunnen berekenen.
Dus:

1. Als we de waarde van *y*, μ en σ kennen, moeten we *x* berekenen.
2. Als we de waarde van *x* en *y* en ook μ kennen, moeten we σ berekenen.
3. Als we de waarde van *x* en y en ook σ kennen, moeten we μ berekenen.

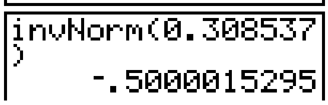
2.1. *x* berekenen

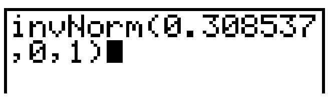
Op het TI83-werkblad “De standaardnormale verdeling” is dit al even aan de orde gekomen.
De functie **`invNorm`** berekent de waarde van *x* bij gegeven μ en σ op basis van de oppervlakte (*y*) van het *gehele* vlakdeel links van *x*.

Hiernaast staat de grafiek van de standaardnormale verdeling.
De waarde van *y* is 0,308537.
Dus $\Phi(z) = 0{,}308537$.
Gevraagd: de waarde van *z*.

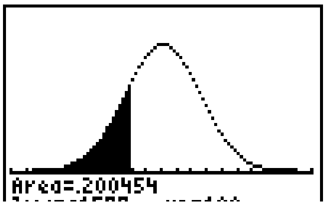


Kies **`[DISTR]<DISTR>3:invNorm(`**.
Vul verder aan met 0,308537.
Zodat: $z = -0{,}50$.
Ga na, dat we ook hier het gemiddelde en de standaarddeviatie kunnen toevoegen.

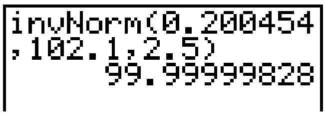




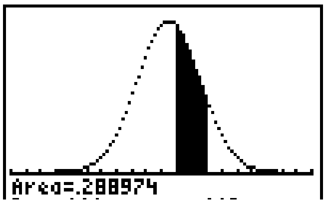
We kunnen dit dus ook toepassen op andere normale verdelingen.
Hiernaast staat een normale verdeling met μ = 102,1 en σ = 2,5.
Hier is y = P(X ≤ x) = 0,200454.



De waarde van x vinden we nu met (>>>).
Dus x = 100,00.



We weten μ = 109,5 en σ = 2,1.
Als y = 0,288974, zoals in de hiernaast staande figuur, kunnen we dan de beide grenzen terugvinden?
Verklaar je antwoord.

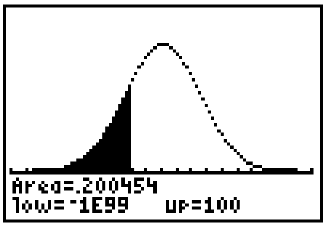


Zie ook paragraaf 2.4. Opnieuw x.

2.2. s berekenen

De functie **`invNorm`** kunnen we hier niet gebruiken. Immers deze functie levert de waarde van x.
We moeten dus een andere aanpak kiezen.

De waarde van y geeft het oppervlak aan van het gehele vlakdeel links van x.
Van de normale verdeling in de figuur hiernaast is nu gegeven:
x = 100
y = 0,200454
μ =102,1
Te berekenen: σ.



We hebben nu de vergelijking

y = **`normcdf`**(x, μ, σ)

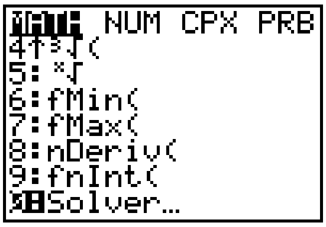
waarin σ de onbekende is.

We gebruiken voor het berekenen van σ de zogenoemde **Solver**.
De Solver is een optie van de TI83 waarmee een vergelijking kan worden opgelost voor elke variabele.
Hierbij wordt verondersteld, dat we een vergelijking hebben die op 0 herleid is:

0 = y - n**`ormcdf`**(x, μ, σ)

De Solver is geplaatst in het [MATH] menu.

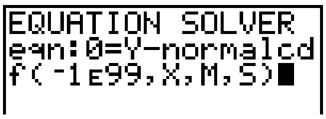
Kies **`[MATH]<MATH>0:Solver…`**



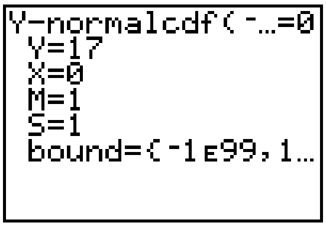
We krijgen dan:

Opmerking
Als de Solver reeds eerder gebruikt is, moet je, om het bovenstaande scherm te krijgen, op [↑] drukken.
De uitdrukking achter **`eqn:0=`** kan dan worden gewist met [CLEAR].
[einde Opmerking]

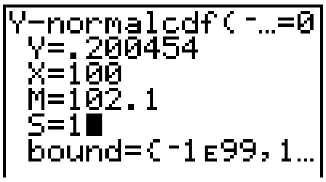
We vullen nu aan zoals hiernaast (>>>) staat.
De M en de S zijn de geheugenplaatsen (variabelen van de TI83) die we zullen gebruiken voor μ en σ.
Nb. Voor de ondergrens gebruiken we altijd -1×10^{99}.



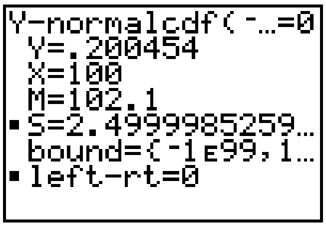
Na het drukken op [ENTER] krijgen we een zogenoemd “interactief” scherm. Daarop staan de variabelen van de op te lossen vergelijking in volgorde van invoer.
De waarden die er achter staan zijn “oude” waarden.



Vul allereerst de bekende waarden in (ze staan hierboven).
Achter **bound** plaatst de TI83 zelf twee standaard waarden, namelijk –1 x 10^{99} en 1 x 10^{99}.
Dit zijn de grenzen waartussen de TI83 zal trachten de oplossing te zoeken.
Meestal is uit de probleemstelling wel duidelijk hoe groot de onbekende is. Je kan dan de waarden achter **bound** daaraan aanpassen.



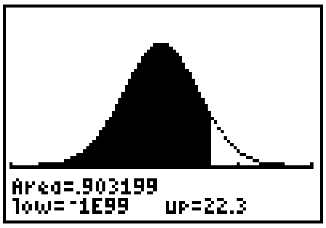
Plaats vervolgens de cursor achter de variabele die je wilt berekenen (achter S dus) en kies **`Solve`** (met [ALPHA][ENTER]).
Na enige tijd verschijnt dan de (een) oplossing (>>>).
In het scherm staat daarvoor het teken ■.
Op de laatste regel van het scherm staat nu ook nog:
`left – rt =`
De waarde daarachter geeft het verschil aan tussen het linker lid en het rechter lid van de vergelijking.
We vinden: σ = 2,5.



2.3. m berekenen

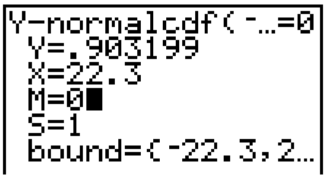
Het berekenen van de waarde van μ gaat op dezelfde manier als voor σ (zie 2).

Van de hiernaast staande normale verdeling is bekend:
x = 22,3
y = 0,903199
σ =1
Bereken μ.

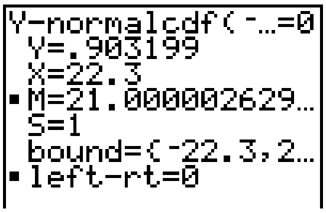


Uit het plaatje kunnen we afleiden, dat de gezochte waarde van μ ligt tussen –22,3 en 22,3 (waarom?).
We kunnen dus in het interactieve Solver-scherm de waarden achter **bound** wijzigen.

We hebben de waarde van M gelijk gemaakt aan 0.
De Solver zal nu trachten uitgaande van die waarde een betere waarde te vinden.
0 heet in dit geval een **startwaarde**.



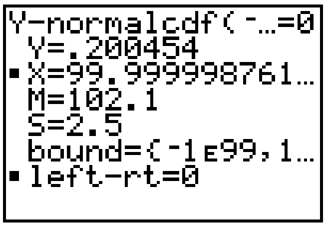
Als je nu Solve kiest, krijg je (>>>).
Dit betekent, dat de Solver niet in staat is, uitgaande van de gegeven waarden, een oplossing te vinden.
Via **`2:Goto`** keer je dan terug naar het Solver-scherm.
Wijzig nu: M = 10.
En je vindt dan *wel* de oplossing: μ = 21.



2.4 Opnieuw *x*

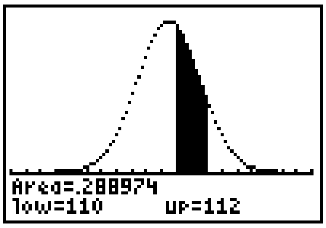
Natuurlijk kunnen we de Solver ook gebruiken om x te berekenen (bij gegeven y, μ en σ).
We nemen dezelfde waarden als in paragraaf 2.1:

y = 0,200454
μ = 102,1
σ =2,5
Bereken x.
Antwoord: x = 100.

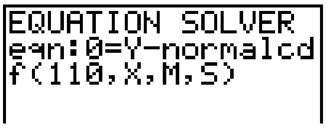


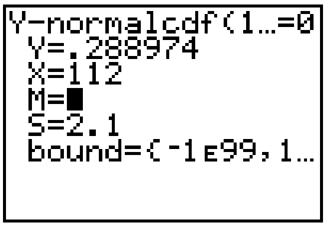
3. Andere berekeningen

Hiernaast staat een normale verdeling waarvoor geldt:
P(110 ≤ X ≤ 112) = 0.288974
Deze verdeling kwam ook al aan de orde in paragraaf 2.1.
Van de verdeling is verder bekend dat σ = 2,1.

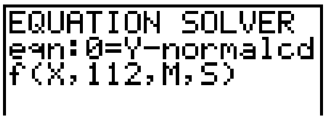


- Bereken μ met behulp van de Solver.
  Aanwijzing
  We moeten in ieder geval de vergelijking wijzigen (de ondergrens is anders dan die we tot nu toe hebben gebruikt).
  Zonder dat we M een startwaarde hebben gegeven (er staat geen waarde achter M), vinden we:
  μ = 109,5

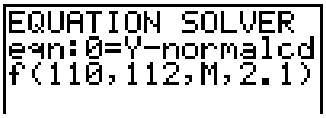




- We hebben hierboven de ondergrens ingevuld in de vergelijking.
  Doe nu hetzelfde door de bovengrens in de vergelijking in te vullen, en dan X (nu als ondergrens), in te vullen op het interactieve scherm.



- En natuurlijk kan het ook zoals het hiernaast (>>>) staat.



4. Opdracht

(Naar: Moderne wiskunde (Wolters-Noordhoff), A1 deel 3, Hoofdstuk S4, par. 4-5, pag. 177)
Elk jaar als de omtrek van een cirkel aan de orde komt, moeten de 182 leerlingen van de tweede klas de omtrek van een blikje opmeten. De door hen gemeten waarden van de omtrek blijken bij benadering normaal verdeeld te zijn. De parameters van die normale verdeling zijn μ = 19,15 cm en σ = 1,06 cm.

a. Hoeveel van deze leerlingen vonden een omtrek tussen 19,0 cm en 19,5 cm?
   Antwoord: 115.
b. Tussen welke grenzen ligt de gemeten omtrek bij 10% van de leerlingen die het dichtst bij de gemiddeld gemeten omtrek zitten?
   Antwoord: 19,02 en 19,28.
c. Door alle meetresultaten te verminderen met de gemiddeld gemeten waarde ontstaat een zogenoemde **foutenkromme**.
   Hoe kun je de verdeling van deze foutenkromme beschrijven?
   Schets de foutenkromme en de kromme die bij de meetwaarden hoort in dezelfde figuur.
d. De leerlingen meten ook de omtrek van een tweede blikje. De omtrek daarvan is volgens 54 van de 182 leerlingen kleiner dan 8,5 cm.
   Neem aan, dat ook de standaarddeviatie van deze meting gelijk is aan 1,06 cm.
   Hoe groot schat je de omtrek van dat tweede blikje?
   Antwoord: 9 cm.

Opmerking
Schrijf bij elke berekening die je op de GR uitvoert, kort op hoe het antwoord tot stand gekomen is.