TI-werkblad

Binomiale kansverdeling

1. Inleiding

We herhalen de definitie van een binomiale kansverdeling.
We bekijken een kansexperiment waarvan de uitkomst precies twee waarden kan hebben.
In alle gevallen kunnen we die waarden aangeven met S (van slagen) en M (van mislukken).
Indien we nu zo'n kansexperiment n keer uitvoeren, waarbij we met X het aantal keer S tellen, dan heet dat kansexperiment **binomiaal**.
De stochast X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met parameters n en p, waarbij p de kans op S is:

$P(S) = p$.

De kans op M wordt meestal aangegeven met q:

$P(M) = q$

Zodat $p + q = 1$.
X wordt in dit geval ook wel een **binomiale stochast** (kansvariabele, toevalsvariabele) genoemd.

Kansverdelingen worden meestal beschreven met *horizontale* tabellen.

Voorbeeld

We werpen 10 maal met een dobbelsteen.
Slagen is het werpen van 1, 2, 3 of 4. Mislukken is het werpen van 5 of 6.
X = aantal keren S.
$p = {}^4/_6 = {}^2/_3$.
De kansverdeling laat zich nu als volgt beschrijven:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$											

De waarden van $P(X = k)$ kunnen worden berekend met behulp van faculteiten (combinaties).

$$P(X=0) = p(MMMMMMMMMM) = P(M^{(10)}) = \binom{10}{0}(\tfrac{1}{3})^{10};$$

$$P(X=1) = P(\underline{SMMMMMMMMM}) = P(\underline{SM^{(9)}}) = \binom{10}{1}(\tfrac{2}{3})^{1}(\tfrac{1}{3})^{9};$$

$$P(X=2) = P(\underline{SSMMMMMMMM}) = P(\underline{S^{(2)}M^{(8)}}) = \binom{10}{2}(\tfrac{2}{3})^{2}(\tfrac{1}{3})^{8};$$

…

De onderstreping betekent in dit geval, dat *alle* permutaties van de onderstreepte *gebeurtenissen* in ogenschouw dienen te worden genomen.
[einde Voorbeeld]

Algemeen geldt hier:

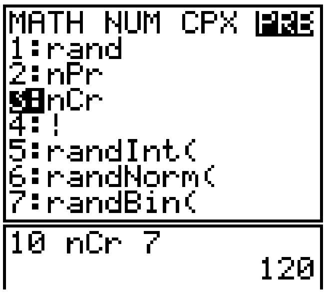
$$P(X=r) = P(\underline{SS...MMM}) = P(\underline{S^{(r)}M^{(n-r)}}) = \binom{n}{r}(p)^{r}(q)^{n-r}.$$

We kunnen de zogenoemde **binomiaalcoëfficiënten** $\binom{n}{r}$ met de GR berekenen, en wel met de functie **`nCr`**. Deze functie staat in het MATH menu.

De berekening van bijvoorbeeld $\binom{10}{7}$ gaat als volgt.

Type [1][0].

Kies **[MATH]<PRB>3:nCr** .

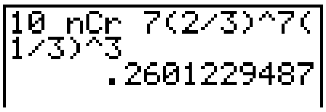


Type vervolgens [7] en druk op **[ENTER]**.

De kansen kunnen eenvoudig berekend worden.

Voorbeeld

We berekenen $P(X=7)=\binom{10}{7}(\tfrac{2}{3})^7(\tfrac{1}{3})^3$.



Deze kans is dus gelijk aan 0,2601.

We spreken af, dat bij een dergelijke berekening de uitkomsten *altijd* worden afgerond op 4 decimalen.

Opdracht 1

Bereken op deze manier ook de overige kansen van bovenstaande kansverdeling.
Vergelijk je antwoorden met de volgende kansverdeling:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X = k)	0,0000	0,0003	0,0030	0,0163	0,0569	0,1366	0,2276	0,2601	0,1951	0,0867	0,0173

2. Sneller, handiger

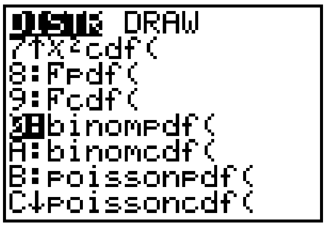
De GR heeft een speciale functie voor het berekenen van kansen bij een binomiaal verdeelde stochast.
Deze functie wordt aangegeven met **binompdf** (Eng. binomial probability density function; Ned. binomiale verdelingsfunctie).
De functie is te vinden in het tweede scherm van het DISTR menu:

[DISTR]<DISTR>0:binompdf.

Opmerking

Je kan snel naar het tweede scherm "springen" door in het eerste scherm van het DISTR menu de toetscombinatie **[ALPHA][¯]** te gebruiken.

[einde Opmerking]



De volgorde waarin je de parameters van deze functie moet invoeren, is

- n aantal herhalingen
- p kans op succes
- k aantal keren succes; dit is dus de waarde van de stochast.

De parameters moeten worden gescheiden door een komma's.

Voorbeeld

Voor $n = 10$, $p = {}^2/_3$ en $k = 7$ hebben we dan (>>>).

Opdracht 2

Herhaal de berekeningen uit Opdracht 1 nog eens. Maar gebruik nu de functie **binompdf**.

Opmerking

Gebruik de toets **[ENTRY]**; dat scheelt.

[einde Opmerking]

Opdracht 3

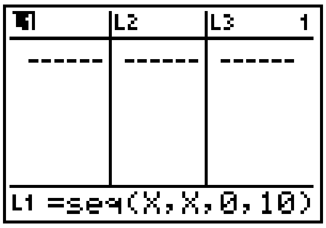
Waarom geeft **binompdf(10,2/3,17)** de waarde 0?
Kijk ook eens wat er gebeurt met **binompdf(10,2/3,2/3)**.

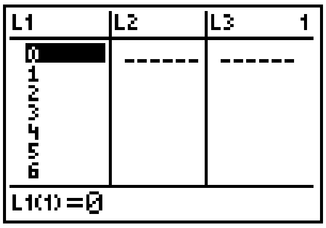
3. Kanshistogrammen

We kunnen met de GR ook een zogenoemd **kanshistogram** bij een binomiale kansverdeling maken.
Hierbij maken we gebruik van lijsten.
In L1 plaatsen we de waarden van *k*; dit zijn alle mogelijke waarden van de stochast.
In L2 plaatsen we de kansen.
Voor dit laatste is het, zoals we zullen zien, niet noodzakelijk alle kansen uit de kansverdeling *afzonderlijk* te berekenen.
We gaan weer uit van $n = 10$, $p = {}^{2}/_{3}$.
De waarden van *k* zijn in dit geval 0, 1, 2, …, 10.

Maak eventueel eerst alle lijsten leeg met **`[MEM]4:ClrAllLists`**.
We plaatsen nu de waarden 0, 1, 2, …, 10 in L1 met de opdracht
`seq(X, X, 0, 10) ® L1`

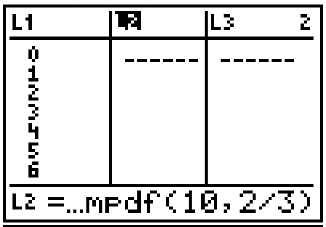
Via het STAT menu kunnen we deze “actie” direct uitvoeren in het LIST venster.
Kies **`[STAT]<EDIT>1:Edit`**.
We zien dan lege lijsten.
Plaats de cursor nu in de kop van de lijst L1 (op naam L1).
Kies dan **`[LIST]<OPS>5:seq`**.
Vul daarna de regel verder aan zoals hiernaast (>>>) staat.
Afsluiten met **`[ENTER]`** geeft dan (>>>)



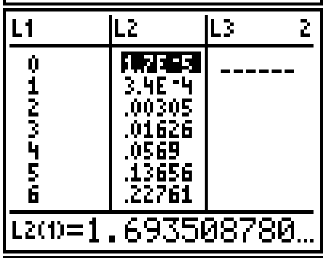


Met de functie **`binompdf`** kunnen we ook *alle kansen* P(X = *k*) in de lijst L2 zetten.
Zoals hierboven staat moeten we aan **`binompdf`** drie parameters meegeven.
Wanneer we echter de parameter *k* weglaten, levert **`binompdf(n,p)`** *alle* kansen voor *k* = 0, 1, …, *n*.

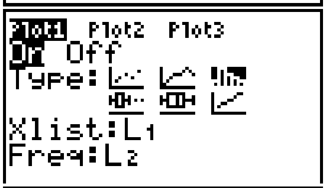
Plaats nu de cursor in de kop van lijst L2 (dus op naam L2).
Vul achter **`L2=`** (onder in het scherm) aan met **`binompdf(10,2/3)`**.



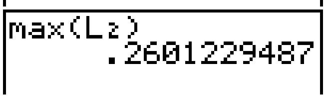
Na **`[ENTER]`** krijgen we (>>>).
Ga na dat deze kansen overeenkomen met die van de kansverdeling bij Opdracht 1.



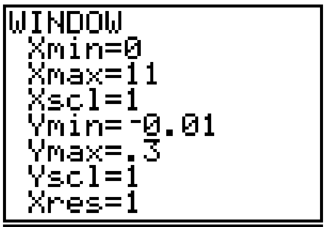
Voor een histogram van deze gegevens gaan we over naar het STAT PLOT menu. We stellen in als hiernaast staat.



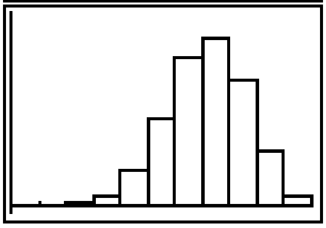
Hierna passen we het WINDOW venster aan.
Daarbij kiezen we Xmin = 0 en Xmax = 11 (dus Xmax = *n* + 1).
Met **`[MATH]<NUM>7:max`** kunnen we de maximale waarde van L2 bepalen.



Deze waarde ronden af op 1 decimaal naar boven. De waarde gebruiken we voor Ymax (in het WINDOW menu).
Om de *x*-as helemaal onder in het scherm te krijgen, kiezen we Ymin = -0,01.



Met **[GRAPH]** krijgen we dan het gewenste histogram (>>>).
We kunnen eventueel met **[TRACE]** de waarden bekijken.



Opdracht 4
Teken een histogram bij een binomiale kansverdeling met n = 15 en p = 0,47.

4. Cumulatieve binomiale verdeling
Bij het werken met kansen is het soms handig uit te gaan van cumulatieve kansen. Gebruikelijk is deze kansen van links naar rechts bij elkaar op te tellen.

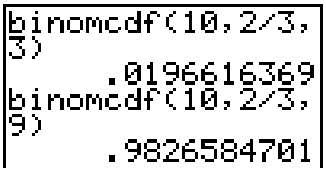
Voorbeeld
We gaan weer uit van een binomiale stochast X met $n = 10$ en $p = {}^2/_3$.
We hebben nu (zie opnieuw bij Opdracht 1):

$P(X \le 0) = P(X = 0) \quad = 0{,}0000$
$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \quad = 0{,}0004$
$P(X \le 2) = P(X \le 1) + P(X = 2) \quad = 0{,}0034$
$P(X \le 3) = P(X \le 2) + P(X = 3) \quad = 0{,}0197$
…
$P(X \le 8) = P(X \le 7) + P(X = 8) \quad = 0{,}8960$
$P(X \le 9) = P(X \le 8) + P(X = 9) \quad = 0{,}9827$
$P(X \le 10) = P(X \le 9) + P(X = 10) \quad = 1{,}0000$

Denk erom dat de waarden in de tabel na Opdracht 1 zijn afgerond op 4 decimalen.
[einde Voorbeeld]

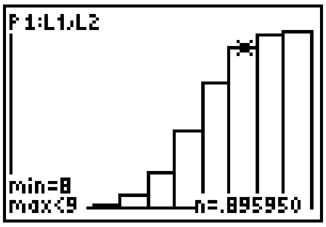
Bovenstaande waarden kunnen ook direct met de GR worden berekend, en wel met de functie **binomcdf** (Eng. binomial cumulative density function; Ned. binomiale cumulatieve verdelingsfunctie).

Hiernaast staan enkele van bedoelde waarden, berekend met **binomcdf**; te vinden met **[DISTR]<DISTR>A:binomcdf**.



Natuurlijk is het ook mogelijk bij deze cumulatieve verdeling met de GR een kanshistogram te maken.
Dit gaat op dezelfde manier als beschreven is in paragraaf 3.

Hiernaast staat het kanshistogram van de binomiale stochast X ($n = 10$, $p = {}^2/_3$), met een "trace-waarde".



Opdracht 5
Geef een cumulatieve kansverdeling van de binomiale stochast X met n = 12 en p = 0,31.
Teken ook het bijbehorende kanshistogram.

Opdracht 6
X is een binomiale stochast met n = 44 en p = 0,52.

Bereken P(X ≥ 17).
Bereken P(17 ≤ X ≤ 23).
Bereken P(X < 16) + P(X > 23).

5. Vergelijkingen en de binomiale verdeling

In paragrafen 2 en 4 hebben we gezien dat de waarden van de functies **binompdf** en **binomcdf** bij gegeven parameters (*n*, *p* en *k*) de gezochte kansen met meer dan voldoende nauwkeurigheid weergeven.
We kunnen nu de vraag stellen of het omgekeerde ook geldt. Met andere woorden:
Kunnen we bij een gegeven kans en twee gegeven parameters de onbekende derde parameter met de GR berekenen?

Voorbeeld

We weten

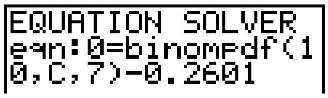
P(X = 7 | n = 10, p = $^2/_3$, X is binomiaal verdeeld) = 0,2601.

We proberen nu met de GR de onbekende C (van chance) te berekenen uit:

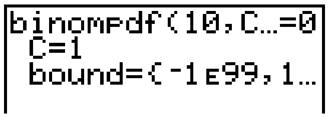
P(X = 7 | n = 10, p = C, X is binomiaal verdeeld) = 0,2601.

We gebruiken daarbij de Solver van de TI83.
We moeten daarbij de op te lossen vergelijking in ieder geval schrijven in de vorm "**0=**".

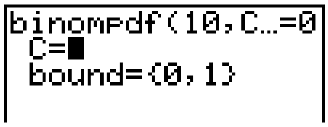
We vinden de Solver met **[MATH]<MATH>0:Solver….**
Vermoedelijk heb je de Solver al eerder gebruikt. Om de vergelijking te kunnen invoeren moet je dan op [↑] drukken.
Wijzig de vergelijking nu als hiernaast (>>>) staat.



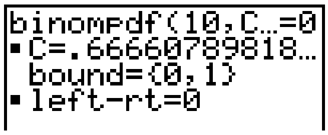
Als je nu op **[ENTER]** drukt zie je iets als (>>>).
Op de eerste regel staat (een deel van) de vergelijking.
Op de tweede regel staat de onbekende C. Er achter staat een waarde die door de GR uit de geheugenplaats met de naam C is gehaald. Dit is *niet* de gezocht waarde!



bound geeft de grenzen aan waarbinnen de oplossing (C dus) moet worden gezocht. Om het proces te versnellen wijzigen we die waarden; immers voor C geldt 0 ≤ C ≤ 1.



Plaats vervolgens de cursor op de regel met C, kies **[CLEAR]**en dan **[SOLVE]**.
Nb. **left-rt** geeft het verschil aan tussen de waarde van het linker lid van de vergelijking (de waarde 0) en die van het rechterlid.
Voorwaar, geen slechte benadering van $^2/_3$!



Opdracht 7

Bereken

P(X = 6 | n =10, p = 0,5307, X is binomiaal verdeeld).

Antwoord: 0,2276.
Bereken nog eens (zie ook Opdracht 1)

P(X = 6 | n =10, p = $^2/_3$, X is binomiaal verdeeld).

Antwoord: 0,2276.
Los met behulp van de Solver op:

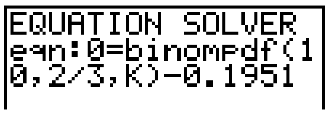
P(X = 6 | n = 10, p = C, X is binomiaal verdeeld).

Kan je een verklaring geven van het nu gevonden antwoord?

Opdracht 8

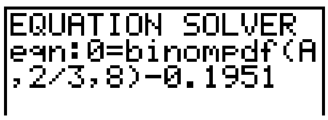
We weten dat voor zekere waarde van K (kans) geldt:

P(X = K | n = 10, p = $^2/_3$, X is binomiaal verdeeld) = 0,1951.

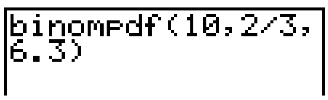


Kijk nog eens bij Opdracht 1. Welke waarde heeft K dan?
Probeer K ook met behulp van de Solver te vinden.
We weten dat voor zekere waarde van A (aantal) geldt

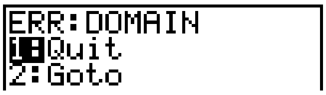
P(X = 8 | n = A, p = $^2/_3$, X is binomiaal verdeeld) = 0,1951.



De waarde van A is 10 (zie hierboven).
Probeer A ook met behulp van de Solver te vinden.
In beide gevallen krijgen we een foutmelding.
Voordat we een oplossing voor dit probleem geven, het volgende



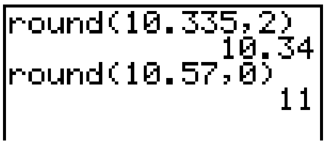
Bekijk het resultaat van **binompdf(10,2/3,6.3)**. Zie ook Opdracht 3.
De GR kan dit niet berekenen, omdat de waarde van de derde parameter een *geheel getal* MOET zijn (**ERR:DOMAIN**)!
Hetzelfde geldt voor de eerste parameter van **binompdf** (en **binomcdf**)!



Een verklaring voor het mislukken van de eerste twee berekeningen is nu eenvoudig.
Bij het oplossen via de Solver probeert de GR een *gehele* waarde van K en een *gehele* waarde van A te vinden. En **dat** mislukt, omdat de Solver werkt met *benaderingen via reële getallen.*

Opdracht 9

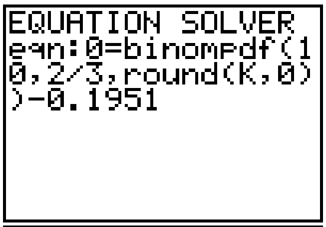
De functie **round** is te vinden via het MATH menu; kies **[MATH]<NUM>2:round**.
Bekijk met behulp van die functie de resultaten van:
round(10.4564, 0)
round(10,4564, 1)
round(10,4565, 2)

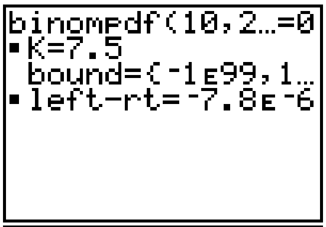


Opdracht 10

We kunnen de functie **round** gebruiken om de “mislukte” berekeningen uit Opdracht 8 wel tot een goed einde te brengen.

Let hier op de twee sluithaakjes!
En …, je moet natuurlijk nu zelf op de juiste waarde afronden.





Let op: de waarde van A is dus 10.
Opmerking
In beide gevallen zijn de waarden achter **bound** niet gewijzigd.